

Komposittseminar Høsten 1999

Alfred Andersen
Matematisk Institutt
Avdeling for Mekanikk.

August 1999



Foreleser og kontaktperson

- Alfred Andersen
- Rom B932
- email: alanders@math.uio.no
- telefon 22856031

Lærebok: Analysis and Performance of fiber Composites; Agarwal & Broutman; Wiley

Hjemmeside for seminaret finnes på

<http://www.math.uio.no/~alanders/komposittsem.html>

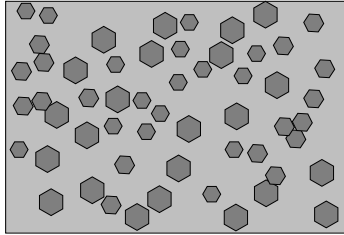
Seminaret

- Forutsetninger
- Grunnleggende faststoffmekanikk
- Innhold
 - Definisjon av begrepet kompositt
 - Karakterisering av nødvendige stivhetsegenskaper for lag med lange ensrettede fiber
 - Kort gjennomgang av kompositter med korte fiber
 - Analyse av enkelt lag (lamina)
 - Klassisk laminat-teori

Innledning

Definisjon

Et komposittmaterial er et materiale som består av en eller flere diskontinuerlige "biter" (fiber, armering) som er plassert i en kontinuerlig masse (matrise).



Matrisens oppgaver er å binde fibrene sammen, overføre laster mellom fibrene og beskytte mot miljø og ytre skader. Fibrenes oppgave er å ta opp krefter.

Egenskaper

Egenskapene til et komposittmaterial er avhengige av egenskapene til fiber og matrise samt mengdeforholdet mellom disse. Armeringens geometri er også viktig.

Klassifisering

Kompositter er klassifisert etter fibergeometrien.

- To hovedklasser
 - Partikkelkompositter
 - Fiberkompositter

Partikkel-kompositter

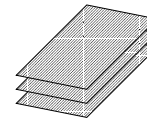
- Kompositter armert med partikler. Disse kan være av
 - ulike geometriske former (kubiske, kuleformet etc.)
 - ulike materialer (gummi, metall, plast etc.)
- Har generelt liten bruddstyrke
- Blir ikke behandlet videre i dette seminaret.

Fiber-kompositter

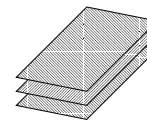
Dette er den viktigste klassen med kompositter. Fiber-kompositter har svært høy styrke.

Kan videre deles i to klasser:

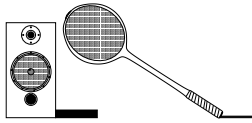
- Ett-lags (Single layer)



- Multi-lags (Multi layer)



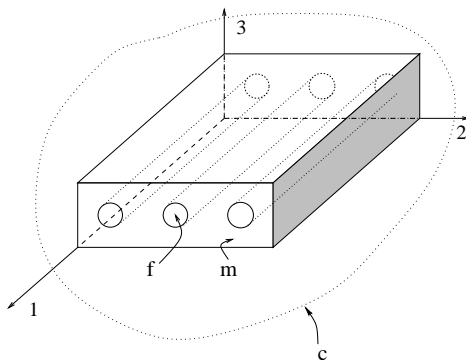
Bruksområder



- Enkle industrielle produkter som
 - Bokser og beholdere
 - Sykler og annet sportsutstyr
 - HI-FI
- Off-shore virksomhet
 - Stigeledninger
 - Overbygninger
- Bærende konstruksjoner
 - Bruer
 - Chassis
- Luftfart, romfart og krigsindustri

Ensrettede kompositter

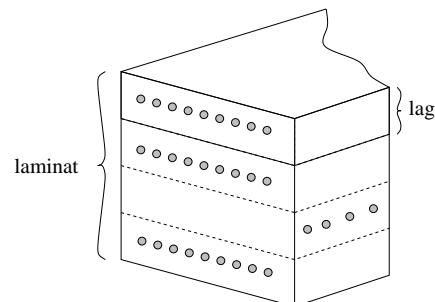
Nomenklatur



- m - matrise
- f - fiber
- c - kompositt
- 1 - lengderetning
- 2 og 3 - tverretning

Ensrettede kompositter

Et laminat er bygget opp av flere lag. Hvert lag består av parallelle fiber lagt i en matrise. Lagene kan gjerne ha forskjellige fiberorienteringer



Pga. strukturen til et ensrettet kompositt er egenskapene forskjellige i tverr- og lengderetning.

Volum-/vektandeler

En av de viktigste faktorene som bestemmer et kompositts egenskaper er mengdeforholdet mellom fiber og matrise.

Forholdet kan beskrives vha.

- Volumandel
- Vektandel

Dette er to likeverdige beskrivelsesmetoder.

Volumandeler

- v_c volum kompositt
- v_m volum matrise
- v_f volum fiber
- $v_c = v_f + v_m$

Def. volumandel

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (1)$$

Vektandeler

- w_c vekt kompositt
- w_m vekt matrise
- w_f vekt fiber
- $w_c = w_f + w_m$

Def. vektandel

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad W_m = \frac{w_m}{w_c} \quad (2)$$

Tettheten ρ gir en sammenheng mellom de to målene:

$$w_c = w_f + w_m \quad (3)$$

$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m \quad (4)$$

gir

$$\rho_c = \rho_f \frac{v_f}{v_c} + \rho_m \frac{v_m}{v_c} \quad (5)$$

eller

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (6)$$

Tilsvarende

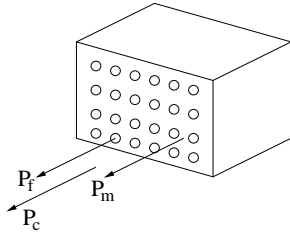
$$\rho_c = \frac{1}{(W_f/\rho_f) + (W_m/\rho_m)} \quad (7)$$

Innledning

For å kunne foreta analyser av konstruksjoner hvor komposittmaterialer benyttes må de nødvendige stivhetsegenskapene bestemmes. Dvs. elastisitetsmoduler i lengde og tverretning, skjærmodul og Poissons forhold.

Styrke og stivhet i lengderetning

Anta at fibrene er uniforme mhp. egenskaper og diameter, kontinuerlige og parallelle gjennom hele komposittet og at det er full heft mellom matrise og fiber.



- $\epsilon_f = \epsilon_m = \epsilon_c$
- $A_i, i = c, f, m$ er de respektive areal

Får da:

$$P_c = P_f + P_m \quad (8)$$

$$P_c = \sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (9)$$

$$\sigma_c = \sigma_f \frac{A_f}{A_c} + \sigma_m \frac{A_m}{A_c} \quad (10)$$

Da fibrene er parallelle kan vi benytte (1)

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (11)$$

Lineært elastisk tilfelle:

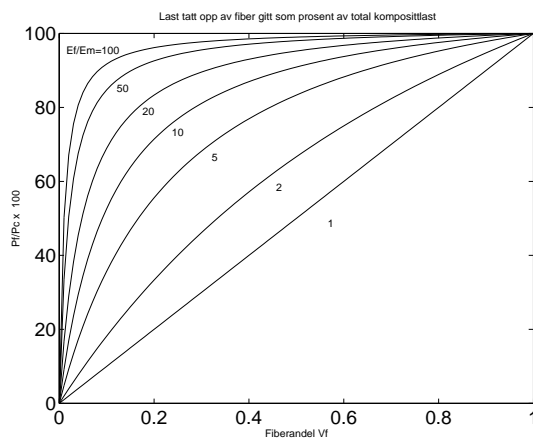
Deriverer mhp. tøyningene

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \quad (12)$$

(11) og (12) indikerer at bidragene fra fiber og matrise er proporsjonal med volumandelene. "Rules of mixtures"

Det er også interessant å se hvor mye av kreftene som taes opp av fibrene i komposittet. Finner:

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{E_f / E_m}{(E_f / E_m) + (V_m / V_f)} \quad (13)$$



Ikke-lineært elastisk tilfelle:

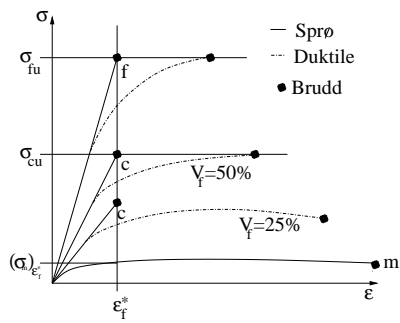
Generelt vil ikke et kompositt deformeres etter lineær teori. Deformasjonsforløpet vil være som følger:

- 1) Fiber og matrise deformeres lineært elastisk
- 2) Fibrene deformeres lineært mens matrisen går over i en ikke-lineær fase
- 3) Både fiber og matrise deformeres ikke-lineært
- 4) Fibrene får brudd, etterfulgt av kompositt brudd

Kommentarer:

- 1) Her har (12) ubegrenset gyldighet
- 2) Ikke-lineær oppførsel av matrise:

$$E_c = E_f V_f + \frac{d\sigma_m}{d\epsilon_m} V_m$$
- 3) Både fiber og matrise deformeres ikke-lineært (11)
- 4) Fibrene får brudd, etterfulgt av kompositt brudd



- $V_f > V_{min}$; fiberbrudd → kompositbrudd

- Gir følgende uttrykk for maksimalspenningen i komposittet:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m) \epsilon_f^* (1 - V_f) \quad (14)$$

- $V_f < V_{min}$; fibrene tar ikke opp krefter for $\epsilon > \epsilon_f^*$

- Gir følgende uttrykk for maksimalspenningen i komposittet:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - V_f) \quad (15)$$

Legg merke til at (15) gir en kompositstyrke som er lavere enn matrisens styrke, mens (14) både kan gi høyere og lavere. Setter (14) lik (15):

$$\sigma_{fu} V_f + (\sigma_m) \epsilon_f^* (1 - V_f) = \sigma_{mu} (1 - V_f) \quad (16)$$

V_{min} er definert som minimum fiberandel ($V_f = V_{min}$), får da;

$$V_{min} = \frac{\sigma_{mu} - (\sigma_m) \epsilon_f^*}{\sigma_{fu} + \sigma_{mu} - (\sigma_m) \epsilon_f^*} \quad (17)$$

V_{min} gir dermed en uinteressant størrelse, definerer derfor V_{crit} som forholder seg til en ny nedre styrkegrense, σ_{mu}

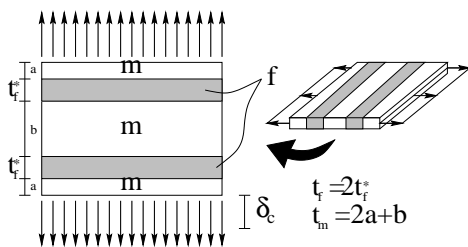
$$\sigma_{fu} V_f + (\sigma_m) \epsilon_f^* (1 - V_f) \geq \sigma_{mu} \quad (18)$$

Gir

$$V_{crit} = \frac{\sigma_{mu} - (\sigma_m) \epsilon_f^*}{\sigma_{fu} - (\sigma_m) \epsilon_f^*} \quad (19)$$

Styrke og stivhet i tverretning

Anta at fibrene er uniforme mhp. egenskaper og diameter, kontinuerlige og parallelle. Hvert lag (fiber og matrise) er dessuten uniformt mhp. tykkelsen t . Komposittet er utsatt for spenninger i



tverretning. Hvert lag vil dermed bære den samme last eller spenning

- $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_c$
- $\delta_c = \delta_f + \delta_m$
 - $\delta_c = \epsilon_c t_c$
 - $\delta_m = \epsilon_m t_m$
 - $\delta_f = \epsilon_f t_f$

Volum er proporsjonale med t . Vi får

$$\epsilon_c = \epsilon_f V_f + \epsilon_m V_m \quad (20)$$

Hvis deformasjonsforløpet er lineært elastisk

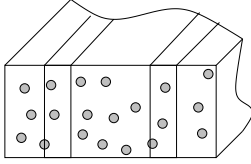
$$\frac{1}{E_c} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (21)$$

Vi har nå funnet uttrykk for elastisitetsmodulen til komposittet i lengde- (12) og tverretning (21). Disse kalles hhv. E_L og E_T

Mens (12) varierer lineært med volumandelene er (21) ikke-lineær. Merk at det kreves relativt mye høyere fiberandel for å øke stivheten til komposittet i tverretning enn i lengderetning.

Dette er imidlertid en meget unøyaktig tilnærming.

Generelt vil et snitt bestå av både fiber og matrise, noe som gjør at kreftene fordeles mellom de to. Antagelsen om



samme spenning i fiber, matrise og kompositt er dermed unøyaktig.

Vi ønsker derfor en bedre tilnærming

Halpin-Tsai

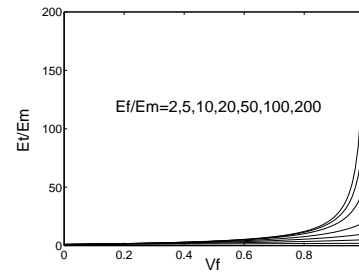
Halpin og Tsai har utviklet generelle og enkle uttrykk for E_T . Resultatene er dårlige hvis V_f blir for stor.

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (22)$$

hvor

$$\eta = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + \xi} \quad (23)$$

mens ξ er avhengig av fiber og "pakkings" geometri. F.eks. er $\xi = 2$ for sirkulære og kvadratiske fiber.



Observerer at $E_T \ll E_L$ og at E_m har en relativt stor innvirkning på E_T .

Tverrstyrke

I lengderetning er det hevet over enhver tvil at fibre øker styrken i komposittet. Fibrene tar pga. sin enorme styrke opp store deler av belastningen.

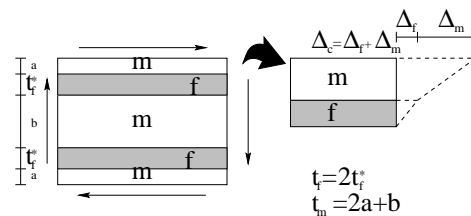
Når det gjelder tverretning er bildet mer komplisert. I nærheten av fibre oppstår det spenningskonsentrasjoner som gjør at komposittet kan ryke for lavere spenninger enn det den uarmerte matrisen ville ha gjort. Mye arbeid er derfor lagt ned for å finne en styrke-reduksjonsfaktor S .

Den maksimale spenningen kan da skrives som

$$\sigma_{TU} = \frac{\sigma_{mu}}{S} \quad (24)$$

Skjærmodul

Antar den samme modellen som for tverrstivhet men belaster ren skjær. (Konstant spenningsmodell)



- $\tau_f = \tau_m = \tau_c$
- $\Delta_c = \Delta_f + \Delta_m$
- $\Delta_c = \gamma_c t_c$
- $\Delta_m = \gamma_m t_m$
- $\Delta_f = \gamma_f t_f$

Dette gir

$$\gamma_c = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (25)$$

Hvis deformasjonsforløpet er lineært elastisk

$$\frac{\tau_c}{G_c} = \frac{\tau_f}{G_f} V_f + \frac{\tau_m}{G_m} V_m \quad (26)$$

Benytter spenningsantagelsen

$$\frac{1}{G_c} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (27)$$

eller

$$G_{LT} = G_c = \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f V_m} \quad (28)$$

Denne tilnærmelsen har selvsagt de samme begrensninger som modellen for E_T hadde. Det kreves derfor mer avanserte metoder for å finne pålitelige resultater.

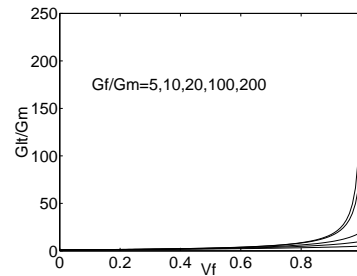
Halpin-Tsai

Halpin og Tsai har utviklet generelle og enkle uttrykk for G_{LT} . Resultatene er særlig gode hvis V_f ikke går opp mot 1.

$$\frac{G_{LT}}{G_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (29)$$

hvor

$$\eta = \frac{(G_f/G_m) - 1}{(G_f/G_m) + \xi} \quad (30)$$



Anbefalt verdi av $\xi = 1$. Legg merke til at G_m har en betydelig innvirkning på G_{LT}

Poissons forhold

Tverrkontraksjonen eller Poissons forhold er den siste viktige parameteren. I første omgang definerer vi to typer, major Poisson (ν_{LT}) og minor Poisson (ν_{TL})

- ν_{LT} relaterer σ_L til ϵ_T
- ν_{TL} relaterer σ_T til ϵ_L

For å finne ν_{LT} benyttes samme modell som for E_T , men med last parallelt med fiberne.

Tøyninger i tverretning kan knyttes til tøyninger i lengderetning som følger

- $(\epsilon_T)_f = -\nu_f (\epsilon_L)_f$
- $(\epsilon_T)_m = -\nu_m (\epsilon_L)_m$
- $(\epsilon_T)_c = -\nu_{LT} (\epsilon_L)_c$

Vha. tilsvarende fremgangsmåte som tidligere kommer man frem til

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (31)$$

ν_{TL} kan så finnes ved $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$

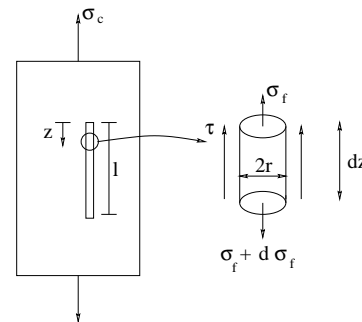
Kompositter med korte fiber

Innledning

- Ensrettede kompositter med lange fiber har:
 - Stor styrke/stivhet på langs.
 - Liten styrke/stivhet på tvers.
- Greit hvis belastningen alltid virker i en gitt retning.
- Dette er et skjeldent tilfelle, ofte virker belastningen i flere retninger.
- Ensrettede lag kan kombineres. Ulempen er at overflatelaget, hvor brudd oftest forekommer fortsatt er svakt på tvers.
- Det er fordelaktig med isotrope lag. Korte fiber med vilkårlig orientering er en løsning.

Belastningen overføres fra matrisen til fibrene. Ende-effekter er neglisjerbare for lange fiber men viktige for korte. Dette må derfor studeres nærmere. Det finnes flere teorier. Vi skal se på skjær-teorien av Rosen.

Spenningsfordeling



Likevektsbetraktning

$$(\pi r^2)\sigma_f + (2\pi r dz)\tau = (\pi r^2)(\sigma_f + d\sigma_f) \quad (32)$$

eller

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = \frac{2\tau}{r} \quad (33)$$

Antar $r = \text{konstant}$, integrerer opp

$$\sigma_f = \sigma_{f0} + \frac{2}{r} \int_0^z \tau dz \quad (34)$$

hvor σ_{f0} er spenning på fiberenden. σ_{f0} antas ofte lik 0 pga. flyt av matrise nær fiberende. (34) kan da skrives som

$$\sigma_f = \frac{2}{r} \int_0^z \tau dz \quad (35)$$

Må gjøre antagelse for fordelingen av τ

- $\tau(z = l/2) = 0$ og $\sigma_f(z = 0, l) = 0$
- Matrisen som omgir fibrene er perfekt plastisk.

Den siste antagelsen betyr at skjærspenningen er konstant langs fiberet og lik flytspenningen i matrisen τ_y .

Ligning (35) blir da

$$\sigma_f = \frac{2\tau_y z}{r} \quad (36)$$

For korte fiber oppstår den maksimale spenningsverdien ved $l/2$

$$(\sigma_f)_{max} = \frac{\tau_y l}{r} \quad (37)$$

Fiberet har imidlertid en maksimalverdi. Hvis man antar at den høyeste verdien er den som et langt fiber kan oppnå vil følgende gjelde:

- Tøyningsantagelse, $\epsilon_c = \epsilon_f = \epsilon_m$

eller

$$\epsilon_f = \epsilon_c \quad (38)$$

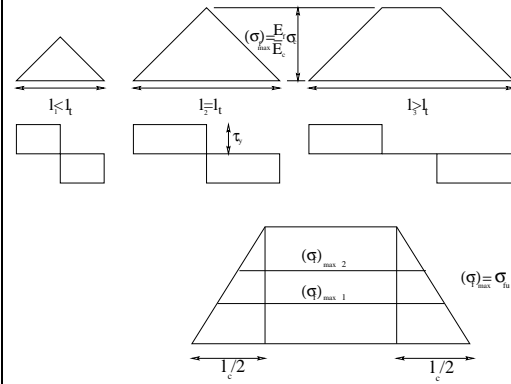
$$\frac{(\sigma_f)_{max}}{E_f} = \frac{\sigma_c}{E_c} \rightarrow (\sigma_f)_{max} = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c \quad (39)$$

Den korteste fiberlengden (l_t) som gir maks spenning fås ved å sette (39) inn i (37)

$$\frac{l_t}{d} = \frac{(\sigma_f)_{max}}{2\tau_y} = \frac{(E_f/E_c)\sigma_c}{2\tau_y} \quad (40)$$

En kritisk fiberlengde, l_c , som er definert som den minste fiberlengde som skal til for å kunne oppnå den maksimale fiberspenning, σ_{fu} finnes fra (40)

$$\frac{l_c}{d} = \frac{\sigma_{fu}}{2\tau_y} \quad (41)$$



Figuren viser spenningsvariasjoner i fiber med ulike lengder. Alle fiber er utsatt for den samme spenningen.

- Denne forenklede teorien stemmer brukbart med numeriske elementberegninger når matrisen er antatt å være elasto-plastisk

Gjennomsnitts fiberspenning

Vi har til nå observert at fiberendene oppnår spenninger langt under maksimalverdiene. Ende-effektene gjør at det kan være hensiktsmessig å operere med en gjennomsnittsspenning som kan benyttes til fastsetting av stivhetsegenskaper for kompositter med korte fiber.

Et gjennomsnitt kan skrives som:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f dz \quad (42)$$

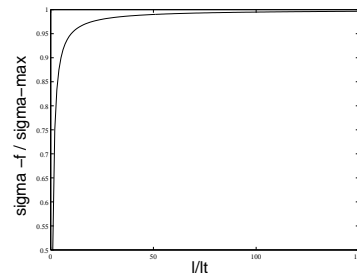
Vha. de tidligere antatte spenningsfordelingene samt (37) og (42) får man da følgende gjennomsnitt:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{2} (\sigma_f)_{max} = \frac{\tau_y l}{d}, \quad l \leq l_t \quad (43)$$

$$\bar{\sigma}_f = (\sigma_f)_{max} \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right), \quad l > l_t \quad (44)$$

Observer:

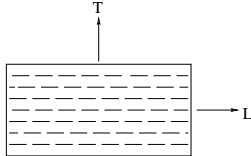
- Forenklet modell gir god gjennomsnittsverdi av spenningsnivået
- Hvis $l \rightarrow 50l_t$ oppfører fibrene seg som lange fibre dvs at $\bar{\sigma}_f \rightarrow (\sigma_f)_{max}$



Plott av (44)

Elastisitetsmodul og styrke

Elementberegninger kan gi verdier for konkrete problemstillinger, men man ønsker seg helst enkle analytiske uttrykk.



Figuren viser retningsbetegnelsene L og T for hhv lengde- og tverretning.

Halpin-Tsai har utviklet følgende uttrykk:

$$\frac{E_L}{E_m} = \frac{1 + (2l/d)\eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} \quad (45)$$

og

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + 2\eta_T V_f}{1 - \eta_T V_f} \quad (46)$$

der

$$\eta_L = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2(l/d)} \quad (47)$$

og

$$\eta_T = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2} \quad (48)$$

Vilkårlig orienterte fiber

Det er ofte ønskelig med kompositter som har korte fiber med vilkårlig orientering, dvs. kompositter med isotropiske egenskaper. Følgende empiriske uttrykk benyttes ofte når elastisitetsegenskapene skal bestemmes for slike materialer.

$$E_{random} = \frac{3}{8}E_L + \frac{5}{8}E_T \quad (49)$$

$$G_{random} = \frac{1}{8}E_L + \frac{1}{4}E_T \quad (50)$$

Beregning av styrke

Den gjennomsnittlige spenningen i komposittets lengderetning finnes vha. "rules of mixtures"

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_f V_f + \sigma_m V_m \quad (51)$$

Setter inn (43) og (44)

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_f)_{max} V_f + \sigma_m V_m, \quad l \leq l_t \quad (52)$$

$$\sigma_c = (\sigma_f)_{max} \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right) V_f + \sigma_m V_m, \quad l > l_t \quad (53)$$

$$\sigma_c = (\sigma_f)_{max} V_f + \sigma_m V_m, \quad l \gg l_t \quad (54)$$

Den maksimale spenningen for komposittet blir da som følger:

$$\sigma_{cu} = \frac{\tau_y l}{d} V_f + \sigma_{mu} V_m, \quad l \leq l_c \quad (55)$$

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) V_f + (\sigma_m)_{\epsilon_f^*} V_m, \quad l > l_c \quad (56)$$

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\epsilon_f^*} V_m, \quad l \gg l_c \quad (57)$$

Som for kompositter med lange ensrettede fiber gjelder (56) og (57) for $V_f \geq V_{min}$. V_f og V_{min} defineres ut ifra de samme kriterier som for kompositter med lange ensrettede fiber.

$$V_{min} = \frac{\sigma_{mu} - (\sigma_m)\epsilon_f^*}{\bar{\sigma}_f + \sigma_{mu} - (\sigma_m)\epsilon_f^*} \quad (58)$$

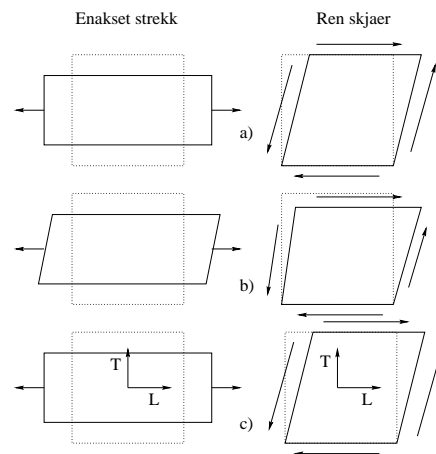
$$V_{crit} = \frac{\sigma_{mu} - (\sigma_m)\epsilon_f^*}{\bar{\sigma}_f - (\sigma_m)\epsilon_f^*} \quad (59)$$

Analyse av ortotropisk lag

Introduksjon

Komposittmaterialer befinner seg i den klassen materialer som ligger mellom de isotropiske og de anisotropiske materialklassene. Klassen kalles ortotropiske-materialer.

Forskjellen mellom disse tre klassene illustreres i følgende figur.



- a) isotropisk
- b) anisotropisk
- c) spesial-ortotropisk

Generelt er oppførselen til et ortotropisk materiale lik den til et anisotropt. Det ortotrope materialet har imidlertid den egenskap at man kan laste i visse retninger med det resultat at oppførselen blir som for et isotropt materiale. Disse aksene eller retningene er symmetri-aksene til materialet. Her betegnes de med T og L.

Hookes lov for et ortotropisk materiale

Et anisotropt materiale beskrives vha. 21 uavhengige elastisitetskonstanter. Symmetriegenskaper gjør at et ortotropisk materiale beskrives vha. 9 uavhengige konstanter. De tre symmetri planene spennes ut av et aksekors x_1, x_2, x_3 .

Sammenhengen mellom tøyninger og spenninger blir da:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (60)$$

S_{ijkl} kalles *Compliance matrix*. Den inverse matrisen Q_{ijkl} kalles *stiffness matrix*. Dette kan kokes ytterligere ned i 2-D. Alle ledd med indeks 3 sløyfes. Vi får:

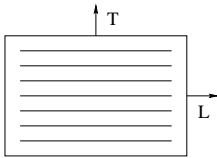
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (61)$$

eller

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Spennings-tøyningsrelasjoner

Vi skal nå betrakte et ortotropisk lag med symmetriakser L og T. Elastisitetskonstantene for dette laget er: E_L, E_T, G_{LT} og ν_{LT} .



Betrakter så dette laget utsatt for tre ulike påkjenninger. Enakset strekk i L og T retning samt ren skjær-belastning. En superponering av disse tre gir spennings-tøynings relasjonen for et ortotropisk materiale.

$$\epsilon_L = \frac{\sigma_L}{E_L} - \nu_{TL} \frac{\sigma_T}{E_T} \quad (63)$$

$$\epsilon_T = \frac{\sigma_T}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_L}{E_L} \quad (64)$$

$$\gamma_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} \quad (65)$$

Disse relasjonene kan settes opp i mariseform. (61) gir at

$$S_{11} = \frac{1}{E_L} \quad (66)$$

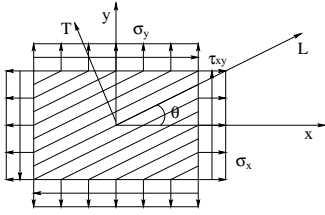
$$S_{22} = \frac{1}{E_T} \quad (67)$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{LT}}{E_L} = \frac{-\nu_{TL}}{E_T} \quad (68)$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{LT}} \quad (69)$$

Det er ikke likegyldig hvilke verdier disse konstantene har. Restriksjonene for et ortotropisk materiale er funnet av Lempriere og er nevnt i læreboka.

Vi tenker oss nå et generelt ortotropisk materiale der L-T aksene er rotert en vinkel θ i forhold til x-y aksene. Man kan da etablere følgende sammenhenger:



$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (70)$$

og

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \frac{1}{2}\gamma_{LT} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (71)$$

der

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Dermed kan man skrive

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Alternativt

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Overgang til ingeniør-konstanter

Elementene i stivhet og compliance matrisene er nå funnet. Det er imidlertid, fra et analyse-synspunkt, ønskelig å finne uttrykk for de kjente størrelsene: E_x , E_y , G_{xy} , ν_{xy} samt et par krysskoeffisienter m_x og m_y .

Ved å benytte definisjonene av elastisitetetskonstantene kan man finne dem en for en.

- **Benytter (76):** $E_x \equiv \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \rightarrow \epsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x$ dvs. $\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x}$

- **Ledd \bar{S}_{11} i (76):**

$$\bar{S}_{11} = c^2(S_{11}c^2 + S_{12}s^2) + s^2(S_{12}c^2 + S_{22}s^2) + s^2c^2S_{66}$$

- $\frac{1}{E_x} = c^4S_{11} + s^4S_{22} + s^2c^2S_{66} + 2c^2s^2S_{12}$

- **Benytter $sc = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ og (66), (67), (68) samt (69)**

- $\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4(\theta)}{E_L} + \frac{\sin^4(\theta)}{E_T} + \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L}\right)$

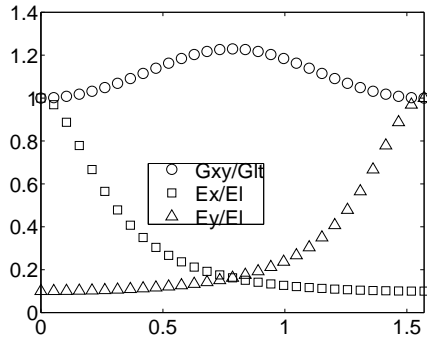
På tilsvarende vis finner man de andre konstantene

- $\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4(\theta)}{E_L} + \frac{\cos^4(\theta)}{E_T} + \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L}\right)$
- $\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{E_L} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{1}{G_{LT}}\right)\cos^2(2\theta)$
- $\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\bar{S}_{12} = \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L}\right)$

Krysskoeffisientene m_x og m_y står i boka.

Plotting av E_x , E_y og G_{xy} viser hvordan disse varierer med θ . I dette plottet er

$E_L = 1000$, $E_T = 100$, $G_{LT} = 70$ og $\nu_{LT} = 0.31$



Styrke i et ortotropisk lag

Ekspérimentelt

- Styrken til et material eller en konstruksjon kan bestemmes eksperimentelt.
 - Det er greit hvis den faktiske belastningen ligner på den som teststykket var utsatt for.
 - Det er ikke greit hvis den virkelige belastningen er langt mer komplisert.
- Det er upraktisk, tidkrevende og dyrt å lage et styrke-kriterium for enhver mulig belastning.
- Styrken i et ortotropisk materiale er dessuten retningsavhengig, noe som kompliserer ytterligere. Vi søker derfor en teoretisk løsning.
- Slagkraftige teorier som kan bestemme styrkeegenskapene til vilkårlige ortotropiske materialer teoretisk.

Maksimum spenningsteori

Teorien sier at materialet får brudd hvis noen av spenningsverdiene i prinsipalretningene overstiger noen av de korresponderende maksimalverdiene.

Følgende ulikheter må være oppfylt for å unngå brudd:

- $\sigma_L < \sigma_{LU}$
- $\sigma_T < \sigma_{TU}$
- $\tau_{LT} < \tau_{LTU}$

Hvis normalspenningene gir trykk-spenninger maa σ_{LU} og σ_{TU} erstattes med maksimum tilatte trykkspenninger.

Maksimum tøyningsteori

Følgende ulikheter må være oppfylt for å unngå brudd:

- $\epsilon_L < \epsilon_{LU}$
- $\epsilon_T < \epsilon_{TU}$
- $\gamma_{LT} < \gamma_{LTU}$

Hvis normaltøyningene gir trykk maa ϵ_{LU} og ϵ_{TU} erstattes med maksimum tilatte trykk-tøyninger.

Maksimum arbeidsteori

For plan spenning:

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{LU}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{LU}}\right)\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{LU}}\right) + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{TU}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{LTU}}\right)^2 < 1$$

Ofte referert til som Tsai-Hill teori.

Laminat teori**Innledning**

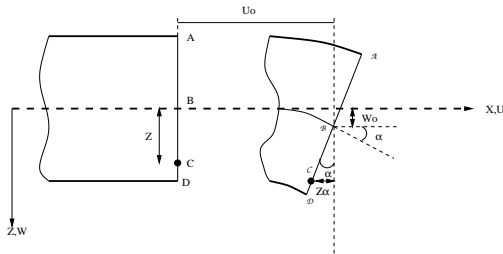
En av de viktigste egenskapene til fiberkompositter er at material-egenskapene lett kan varieres ved å endre laminatets

- lag-tykkelse
- fiberinnhold
- fiberretninger

Til de fleste praktiske formål er det ikke tilfredsstillende at alle fibrene går i den samme retningen. Dette fordi lagene har dårlige egenskaper i tverretning. Man setter derfor komposittet sammen av flere lag med forskjellige fiberorienteringer.

spennings-tøyningsvariasjoner

Vi betrakter deformasjonen av et laminat i x-z planet. Deformasjonene følger Kirchoffs tynnplate-teori.



Vi forutsetter $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$

x-retning

$$u = u_0 - z\alpha \quad (77)$$

der

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (78)$$

Dette gir

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (79)$$

y-retning

Får tilsvarende

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (80)$$

Tøyninger

Ønsker uttrykk for tøyningene. Disse finnes ved å derivere forskyvningene.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (81)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (82)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (83)$$

Denne spennings-tøyningsrelasjonen kan uttrykkes ved hjelp av midtplanstøyninger og krumning på følgende måte:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (84)$$

der midtplanstøyningene er

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (85)$$

og krumningene

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (86)$$

Vi ser at tøyningene varierer lineært over tykkelsen.

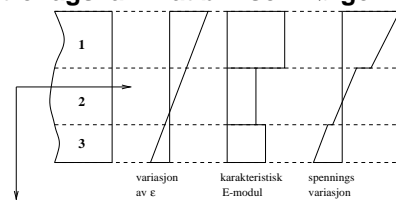
Hvis vi har et laminat med n lag, kan spenningsene til ethvert lag finnes fra følgende forhold: (for lag k)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Der $[\bar{Q}]$ er stivhetsmatrisen med leddene

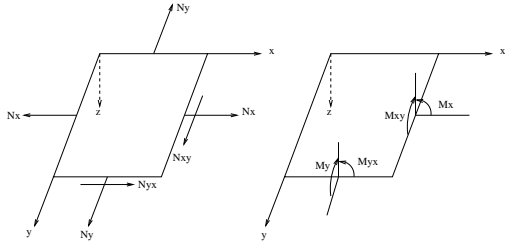
$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Ut i fra $\sigma - \epsilon$ sammenhengen over kan vi se at variasjonen i et hypotetisk tre-lags laminat blir som følger



Laminatets stivhetsmatrise

Spenningsene i et laminat varierer fra lag til lag. Derfor er det hensiktsmessig å behandle et enklere, men ekvivalent system av krefter og momenter som virker på hele laminat-tverrsnittet. Laminatets totale tykkelse er gitt som h .



De resulterende krefter og momenter er definert som følger:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (87)$$

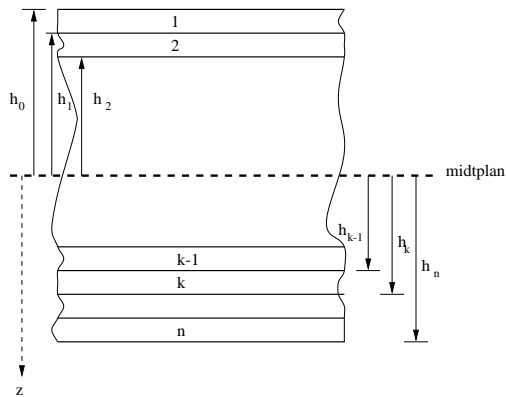
Likeledes finnes resultantmomentene ved å integrere spenningsene ganger momentarm m.h.p midtplanet over tykkelsen h .

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (88)$$

N_x, N_y og N_{xy} har enhet kraft pr. lengdeenhet, og M_x, M_y og M_{xy} har enhet moment pr. lengdeenhet.

De 6 kraft og moment resultatene former et system som er statisk ekvivalent med spenningsystemet på laminatet, men som er påført det geometriske midtplanet til laminatet. Dermed har vi fått et system som ikke inneholder laminat tykkelsen eller z -komponenten eksplisitt.

Vi skal nå betrakte et laminat satt sammen av n ortotrope lag.



Kraft-moment systemet som virker på midtplanet til laminatet finnes ved å bytte ut de kontinuerlige integralene i likning (87) og (88) med summene av integralene som representerer bidraget fra hvert lag i laminatet.

Vi får:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (89)$$

og

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (90)$$

Spenningene i likning (89) og (90) kan skrives om ved hjelp av midtplans tøyninger og krumninger. Dermed kan resultant- krefter/momenter relateres direkte til midtplanstøyninger og krumninger av normalflaten.

Vi får:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \right\} + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} z dz \quad (91)$$

og

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz \right\} + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (92)$$

Likning (91) og (92) kan forenkles siden midtplanstøyninger og krumninger forblir konstante over hele laminatet. Det samme gjelder $[\bar{Q}]$ -matrisen. Disse kan derfor settes utenfor integrasjonstegnet.

Det gir:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right\}}_A \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\}}_B \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (93)$$

og

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\}}_B \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right\}}_D \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (94)$$

Definerer vi matrisene A, B og D som antydnet over, får vi ved å kombinere likning (93) og (94) den konstitutive likningen for laminatet:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Matrisene A, B og D kalles henholdsvis:

- “Extensional stiffness matrix” (Aksialstivhetsmatrise)
- “Coupling stiffness matrix” (Koblingsstivhetsmatrise)
- “Bending stiffness matrix” (Bøvestivhetsmatrise)

A,B,D matrisene

- Aksialstivhetsmatrisen relaterer resultantkreftene til midtplans tøyninger.
- Bøvestivhetsmatrisen relaterer resultantmomentene til krumningene.
- Koblingsstivhetsmatrisen angir kobling mellom bøyning og forlengelse. Normal- og skjærkrefter gir ikke bare midtplans-tøyninger, men også vridning og bøyning. Tilsvarende vil torsjon og bøymoment føre til midtplanstøyninger. Koblingen skyldes generelt ikke-symmetrisk oppbygning av laminatet.

Sammensetning og egenskaper

Det er mulig, og ofte ønskelig å sette sammen laminatet slik at noen ledd i laminatstivhetsmatrisen blir 0. Dette forenkler analysen, og enda viktigere, man kan unngå uønskede koblinger mellom bøyning og strekking eller vridning, samt normalkrefter og skjærtøyninger. Slike koblinger kan gi uønskede spenninger i en konstruksjon der det er restriksjoner på deformasjonene. Vi skal se på noen slike laminater.

- Symmetriske laminater: Analysen av et laminat blir svært forenklet dersom koblingsstivhetsmatrisen $B \equiv 0$. Det kan gjøres ved å konstruere laminatet symmetrisk om midtplanet. Det vil si at ethvert lag overmidtplanet har et tilsvarende lag med lik avstand under midtplanet.

- **Ensrettede, krysslags- og vinkellags laminater:** Man vil også oppnå forenklinger ved å lage et laminat som oppfører seg som et ortotropt lag med hensyn på krefter og tøyninger i planet. Dvs. at det ikke er noen forbindelse mellom normalspenninger (eller krefter) og skjærtøyninger. Dette er mulig hvis $A_{16} = A_{26} = 0$. For å få det til må det for hvert lag med orientering θ , finnes et lag av samme tykkelse og med samme ortotropiegenskaper, men med motsatt orientering ($-\theta$). Lagenes posisjon i forhold til hverandre er uvesentlig. Alternativt kan man orientere lagene 0 eller 90 grader.

Man kan også vurdere å forenkle bøyestivhetsmatrisen D . Siden Q_{16} og Q_{26} er odde funksjoner av θ , vil disse leddene blir null når alle lagene har orientering 0 eller 90 grader, eller hvis hvert lag med orientering θ en avstand over midtplanet, har et identisk lag i lik avstand under midtplanet, med motsatt orientering ($-\theta$).

Slike laminater vil imidlertid ikke være symmetriske om midtplanet, unntatt for krysslagslaminater med orientering 0 og 90 grader. Hvis laminatet bygges opp av lag med annethvert lag med positiv og negativ orientering, vil D_{16} og D_{26} leddene bli små, særlig hvis laminatet er bygd opp av mange lag. Da vil bidragene fra $+\theta$ og $-\theta$ lag kansellere hverandre.

Oppsummert for ensrettede, krysslags- og vinkellagslaminater:

- Ensrettede laminater. (Alle lagene har samme orientering.)
- Krysslagslaminater. (Lagene har kun orientering 0 eller 90 grader.)
- Vinkellagslaminater med likt antall lag orientert i en vinkel $\pm\theta$ grader.

- **Kvasiisotrope laminater:** Dette er laminater av stor praktisk betydning. I et kvasiisotrop laminat vil aksialstivhetsmatrisen A , være isotrop. Det vil si at elastisitetskoeffisientene er uavhengige av orienteringen i planet.

For å få det til må det kun være 2 uavhengige elastisitetskonstanter som for et isotropt materiale.

Man får et kvasiisotrop laminat ved å oppfylle følgende krav

- Laminatet må minst inneholde 3 lag.
- Alle lagene må ha lik stivhetsmatrise $[Q]$, og lik tykkelse.
- Lagene må være orientert med vinkelen π/n mellom hvert lag.

Spenninger og tøyninger i laminatet

- Ønsker spenninger og tøyninger til hvert av lagene i laminatet.
- Trenger da en metode for å finne midtplansspenningene og tøyning
- Belastning og oppbygning av laminatet er kjent.

Ser på likningene for N og M i den konstitutive likningen (95) hver for seg:

$$\{N\} = [A] \{\epsilon^0\} + [B] \{k\} \quad (96)$$

$$\{M\} = [B] \{\epsilon^0\} + [D] \{k\} \quad (97)$$

Fra (96) finner vi

$$\{\epsilon^0\} = [A^{-1}] \{N\} - [A^{-1}][B] \{k\} \quad (98)$$

Setter (98) inn i (97)

$$\{M\} = [B][A^{-1}] \{N\} - ([B][A^{-1}][B] - [D]) \{k\} \quad (99)$$

Definerer

- $[A^*] = [A^{-1}]$
- $[B^*] = -[A^{-1}][B]$
- $[C^*] = [B][A^{-1}] = -[B^*]^T$
- $[D^*] = [D] - [B][A^{-1}][B]$

settes inn i (98) og (99) får vi

$$\{\epsilon^0\} = [A^*] \{N\} + [B^*] \{k\} \quad (100)$$

$$\{M\} = [C^*] \{N\} + [D^*] \{k\} \quad (101)$$

Løser (101) mhp. krumningen

$$\{k\} = [D^{*-1}] \{M\} - [D^{*-1}][C^*] \{N\} \quad (102)$$

Setter (102) inn i (100)

$$\{\epsilon^0\} = ([A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*]) \{N\} + [B^*][D^{*-1}] \{M\} \quad (103)$$

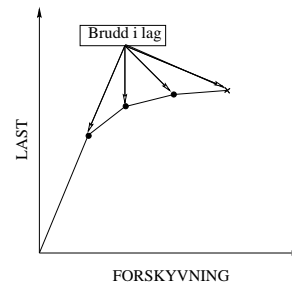
Forenkler

- $[A'] = [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] = [A^*] + [B^*][D^{*-1}][B^*]^T$
- $[B'] = [B^*][D^{*-1}]$
- $[C'] = -[D^{*-1}][C^*] = [B']^T = [B']$
- $[D'] = [D^{*-1}]$

Vi har da den fulle inverterte konstitutive loven

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (104)$$

Laminatet etter initielt brudd



- Til nå har vi forutsatt at laminatet er inntakt. Når lasten øker i intensitet vil imidlertid spenningsene forårsake brudd. Dette kalls FPF eller "first ply failure".
- Etter FPF vil oppførselen fravike (95) og bli diskontinuerlig i sin oppførsel. Etter som lasten øker vil jo flere og flere lag ryke.
- Forventet oppførsel blir derfor som vist i figuren over.

Man antar at responsen er lineær mellom to diskontinuiteter da lagene har en lineær oppførsel fram til brudd. (95) gjelder derfor for hvert inkrement, man skriver da

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{N} \\ \Delta \mathbf{M} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon^0 \\ \Delta k^0 \end{Bmatrix}_i \quad (105)$$

Merk at

- $\bar{\mathbf{A}} \neq \mathbf{A}$
- $\bar{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}$
- $\bar{\mathbf{D}} \neq \mathbf{D}$

De nye matrisene blir modifisert for hvert lag som ryker.

Modifiseringen er avhengig av flere faktorer

- Hvilket brudd-modus.
- Avhengighet mellom lengde- og tverretning.
- Antatt stivhet for lag med brudd.

Inkrementene funnet fra (105) blir lagt til som følger

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta N_y \\ \Delta N_{xy} \end{Bmatrix}_i \quad (106)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_{xy} \end{Bmatrix}_i \quad (107)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x^0 \\ \Delta \epsilon_y^0 \\ \Delta \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_i \quad (108)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_{xy} \end{Bmatrix}_i \quad (109)$$

Spenningene i hvert lag finnes så fra

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_k$$

Eksempel

- Krysslagslaminat: n lag, l 0-lag og m 90-lag, $n = l + m$
- E_L elastisitetsmodul, lengderetning
- E_T elastisitetsmodul, tverretning
- Bruddtøyninger: $\epsilon_{LU}, \epsilon_{TU}$
- Primær modul E
- Sekundær modul E_s

Rules of mixtures gir oss

$$E = \frac{l}{n} E_L + \frac{m}{n} E_T \quad (110)$$

Forutsetter at alle lag er inntakte

Brudd i 90-lag når kompositttøyningen når ϵ_{TU} . Spenningen i komposittet ved bruddet i 90-laget er dermed

$$\sigma_A = E \epsilon_{TU} \quad (111)$$

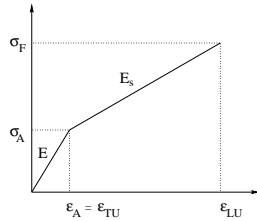
Når totalspenningene i komposittet overstiger σ_A tas hele lasten opp av 0-lagene

$$E_s = \frac{1}{n} E_L \quad (112)$$

E_s er dermed lik modulen for 0-lagene korrigert for areal-reduksjonen

Kompositt-bruddet kommer når kompositt-tøyningen når ϵ_{LU} . Vi antar at 90-lagene ikke relaxerer mhp. spenningene. Bruddspenningen kan dermed skrives som:

$$\sigma_F = \sigma_A + E_s(\epsilon_{LU} - \epsilon_{TU}) \quad (113)$$



Basert på figuren

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \sigma \leq \sigma_A \quad (114)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_A}{E} + \frac{\sigma - \sigma_A}{E_s}, \quad \sigma \geq \sigma_A \quad (115)$$

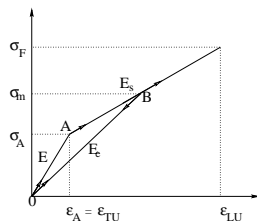
Det er ønskelig å skrive (115) på formen

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_c}, \quad \sigma \geq \sigma_A \quad (116)$$

der E_c kalles effektiv-modul.

Uttrykket for E_c finner man ved å sette (115) lik (116)

$$E_c = \frac{E}{1 + [(E/E_s) - 1][1 - (\sigma_A/\sigma)]} \quad (117)$$



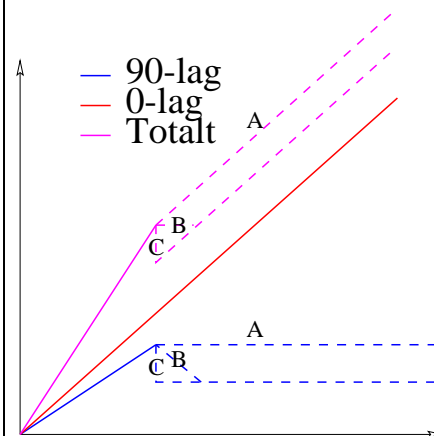
Uttrykkene (114)-(117) gjelder for monotont økende last. Avlastingsveien er derimot avhengig av om man har passert σ_A eller ei.

- $\sigma < \sigma_A$
 - Pålasting 0A, avlastning A0 (114)
- $\sigma > \sigma_A$
 - Pålasting 0A-AB (114)-(115), avlastning B0 (116)*
 - Pålasting 0B (116)*, avlastning B0 (116)* osv.

Kommentarer:

- (116)* modifisert (116) der $\sigma = \sigma_m$ (maksimal pålasting før avlastning).
- Pålastningen som følger første avlastning følger ikke lenger 0A-AB da fibre ikke har full virkning lenger.

Formen på kurvene er avhengig av hvorledes spennings-tøynings kurven ser ut for 90-lagene.



- A: Ingen spenningsrelaksasjon (Slik vi har i våre figurer)
- B: Relaksasjon: Lastkontroll
- C: Relaksasjon: Forskyvningskontroll